V Espaces vectoriels normés

V.A Questions de cours :

* Démontrer la caractérisation de l'adhérence par les suites.
* Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
* Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

V.B Exercices :

Exercice 1: *

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 2: *

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \quad \text{si} \quad A = (a_{i,j}).$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Exercice 3: **

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la distance à une partie non vide A de E est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 4: **

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $N_p(f) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} N_\infty(f)$

Exercice 5: *** Inégalités de Hölder et Minkowski

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que
$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$
Si le cours sur la convexité n'a pas encore été traité, on admet cette première question.
2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant 1$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$
4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$
5. On définit pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$
Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6: ***

Soit $a \geqslant 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit
$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geqslant 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 7: ****

1. Soit u une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.
2. Application : soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et u une suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que (u_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Exercice 8: ****

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evndf, soit F une partie fermée de E et $f : F \to F$ une application contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat précédent reste valable même si on a seulement f^p est contractante pour un entier naturel p.